



Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit

Expérience mise au point dans le cadre de projets expérimentaux à l'Université Pierre et Marie Curie

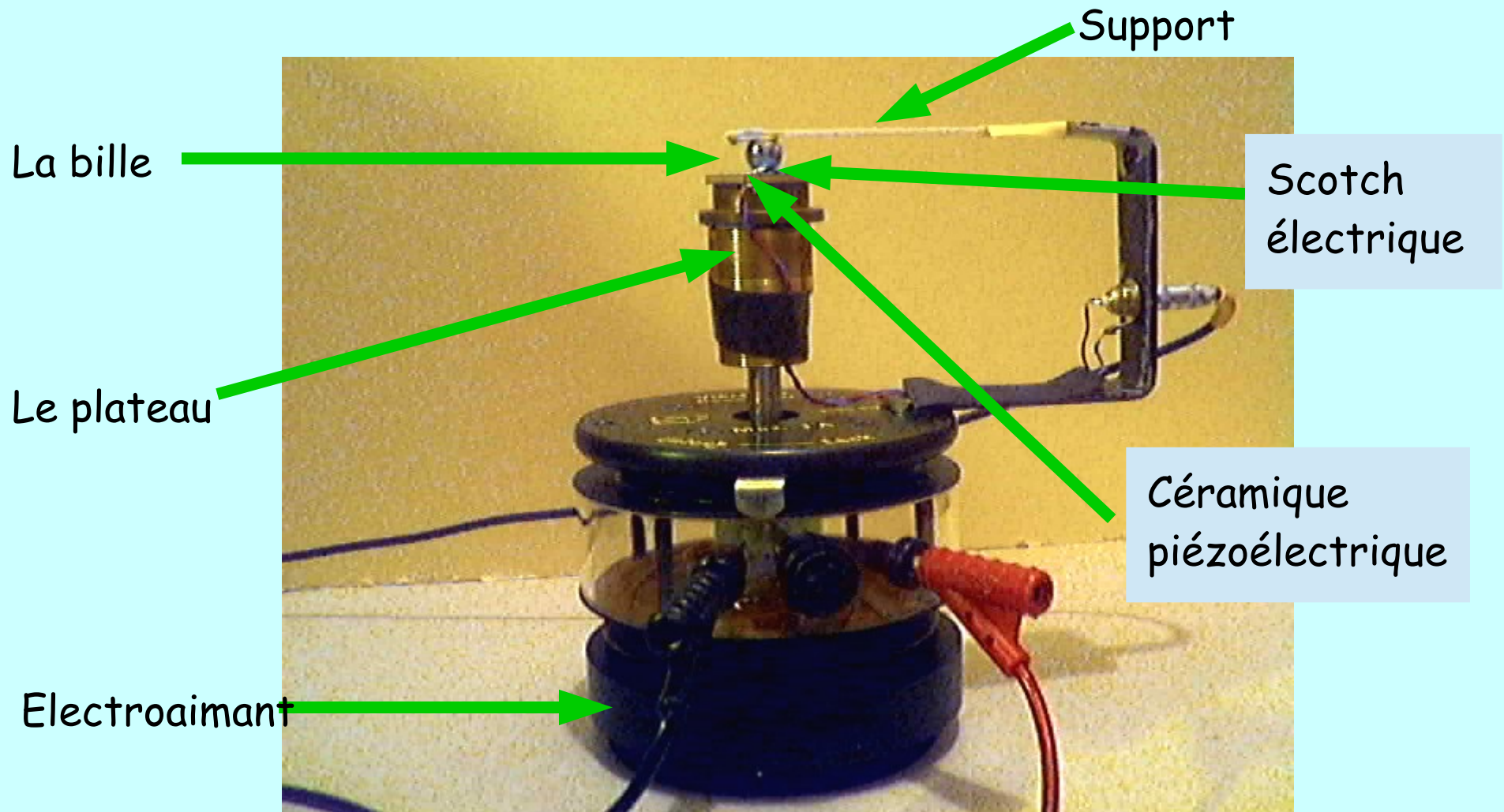
Je remercie tous les groupes d'étudiants qui, au fil des années, ont participé à l'amélioration et l'approfondissement de cette expérience

Article

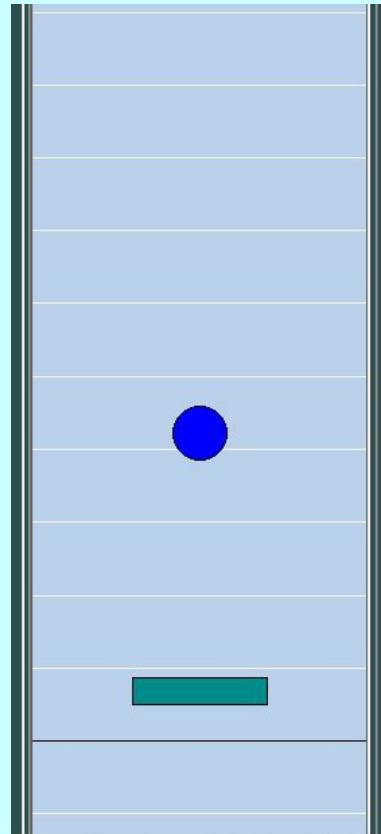
Chaotic dynamics of a bouncing ball

N.B. Tuffilaro, A.M. Albano Am. J. Phys.54, 939, (1986)

L'expérience de la bille qui rebondit



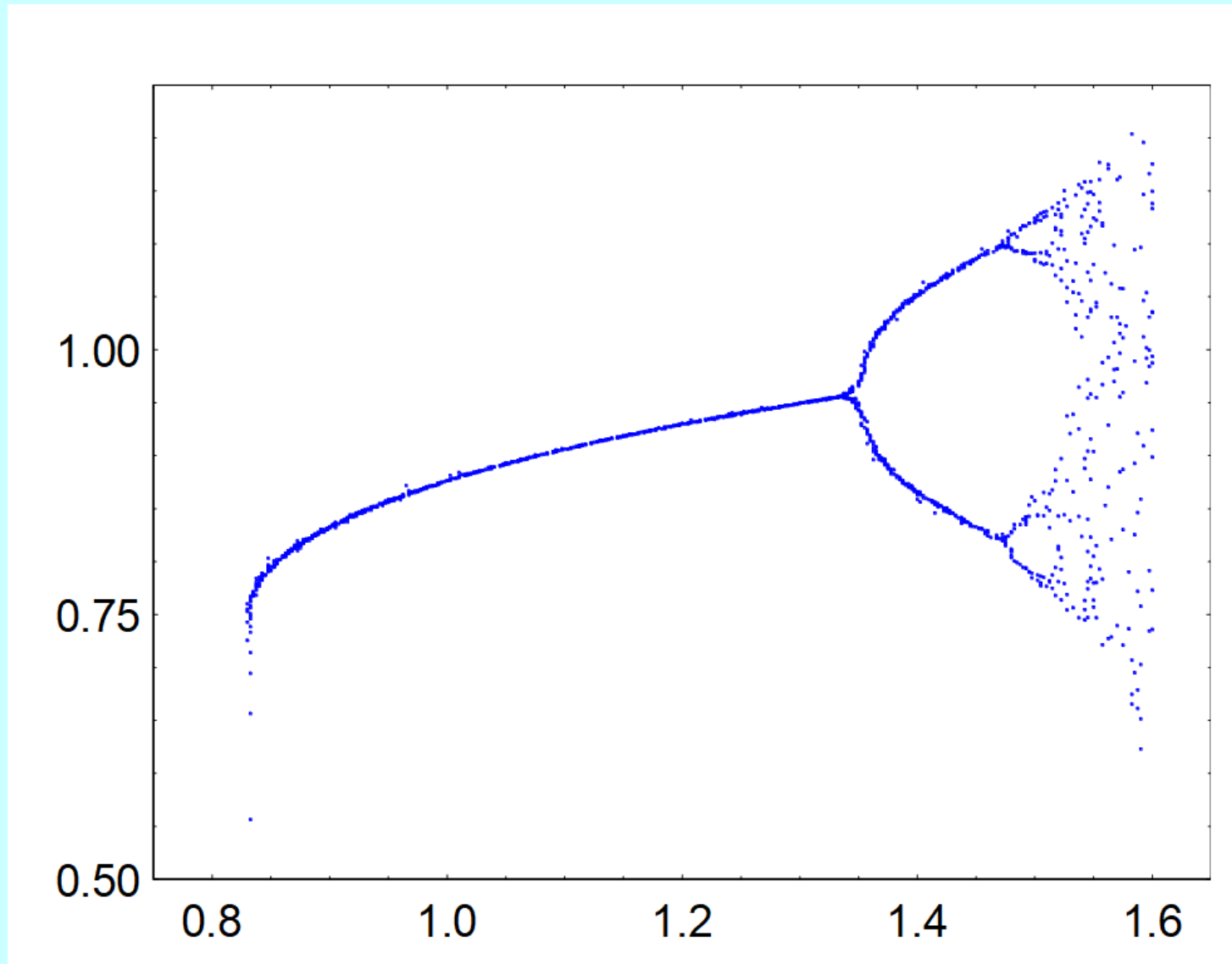
Simulation



Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période

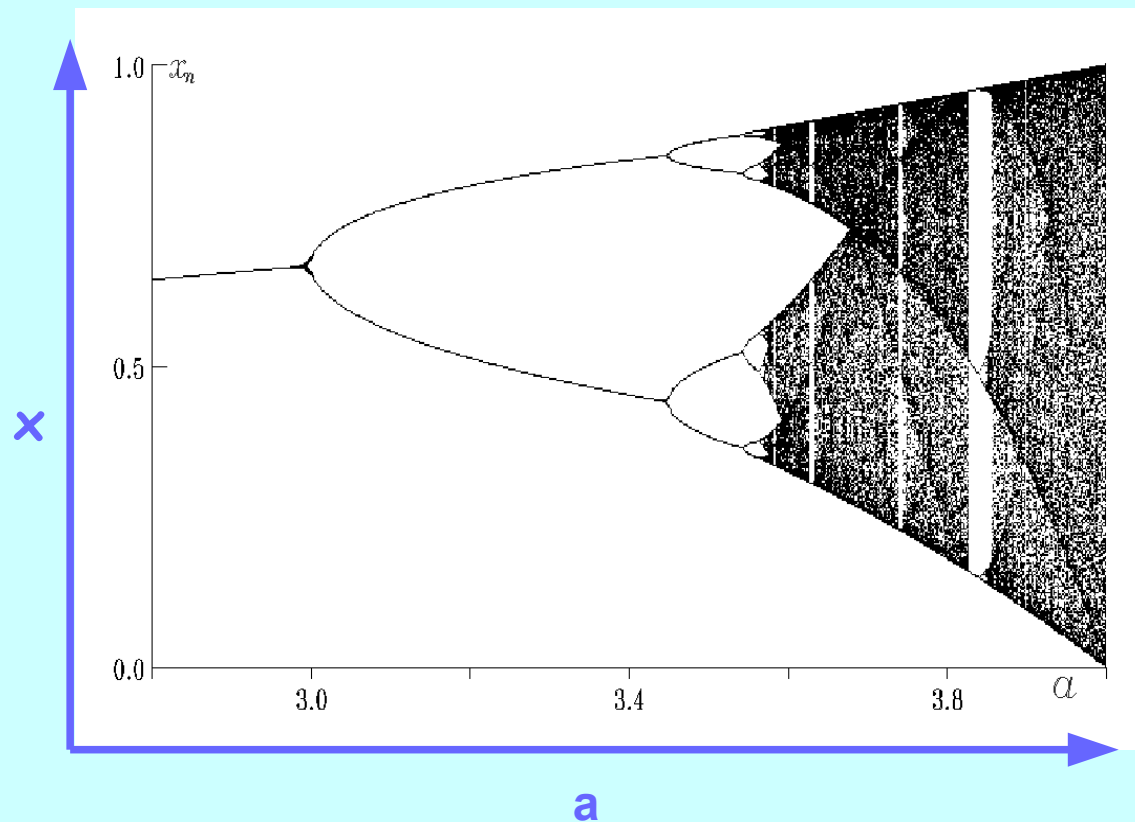
Cascade de doublement de période - expérience



Universalité de la cascade de doublement

- Un petit jeu mathématique : l'application logistique

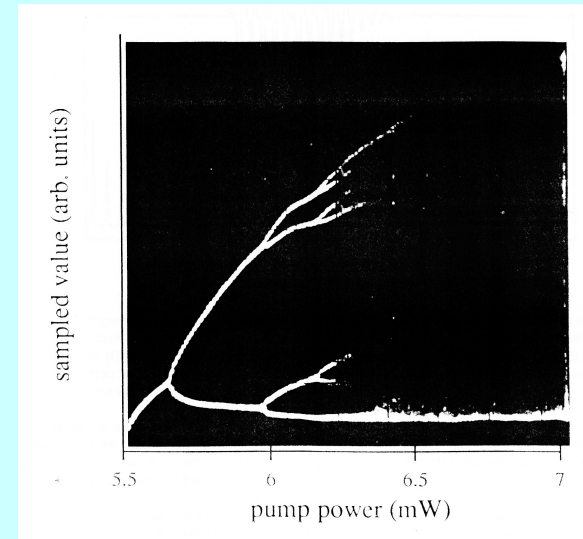
$$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$



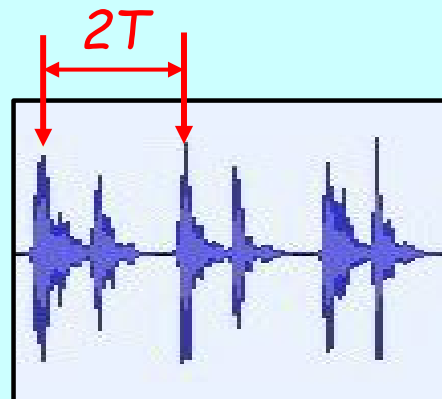
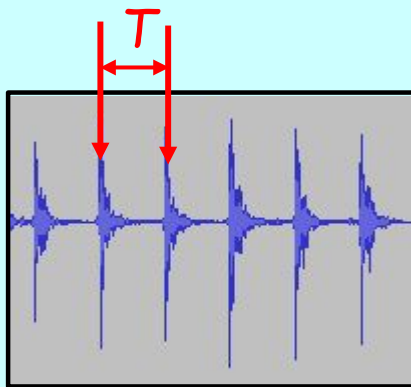
Universalité de la cascade de doublement

- Stabilisation d'un laser

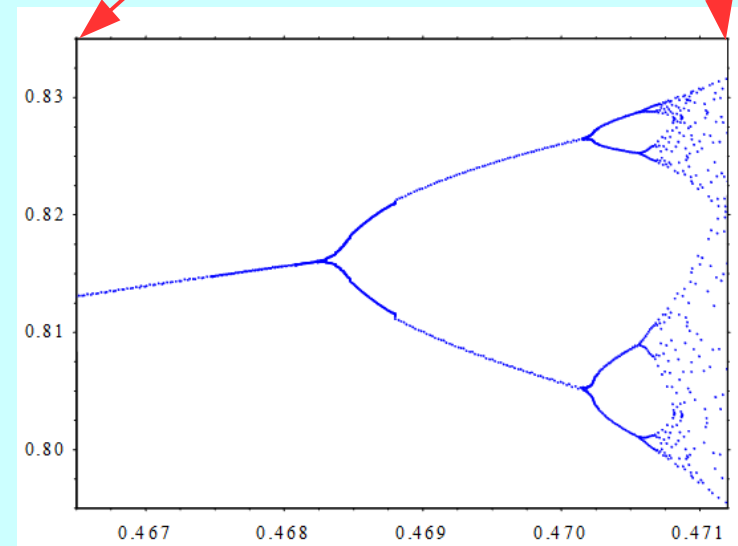
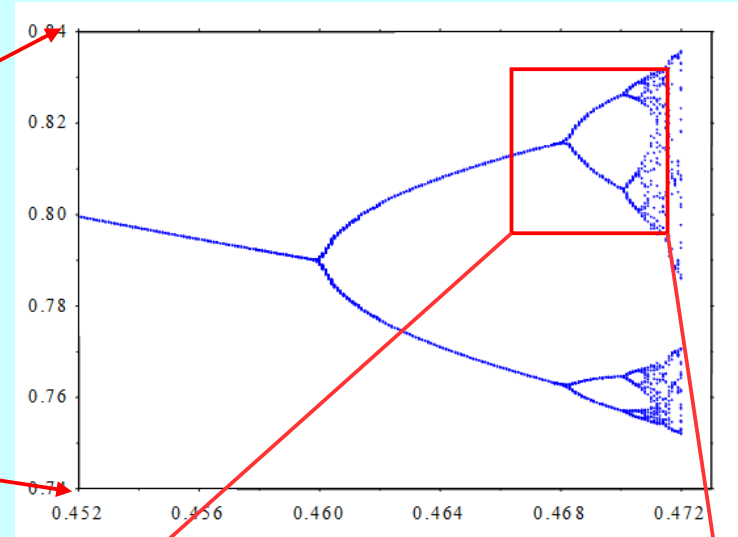
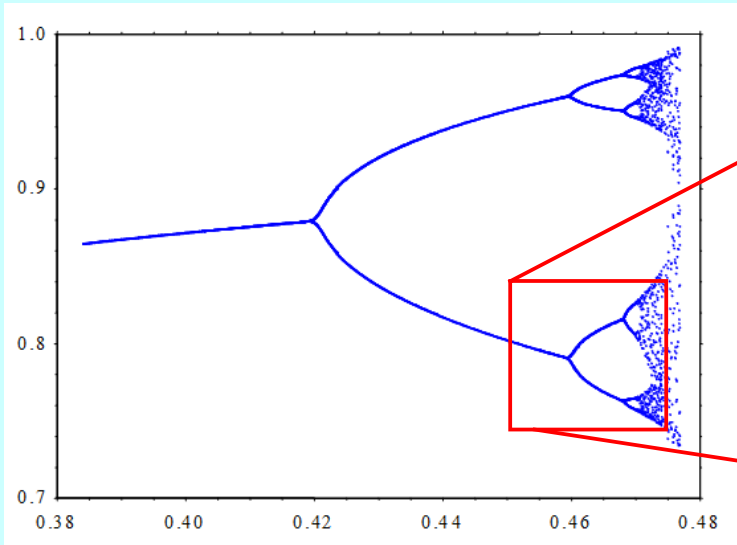
*D'après S. Bielawski, D. Derozier et P. Glorieux
Université de Lille*



- Le robinet qui fuit ○ ○ ○



Autosimilarité - Figure fractale



A toutes les échelles de grandissement on retrouve le même aspect

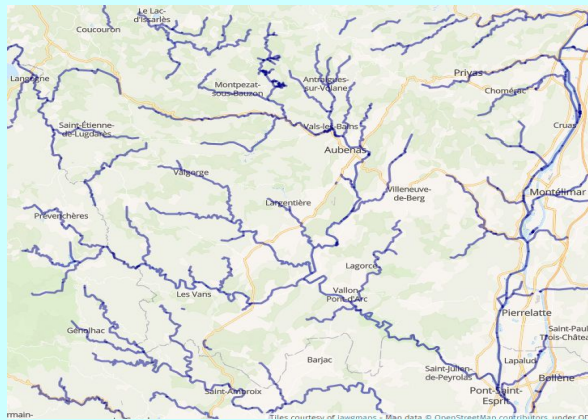
Autosimilarité
Objet fractal

Objets fractals dans la nature - 1

- Arbre



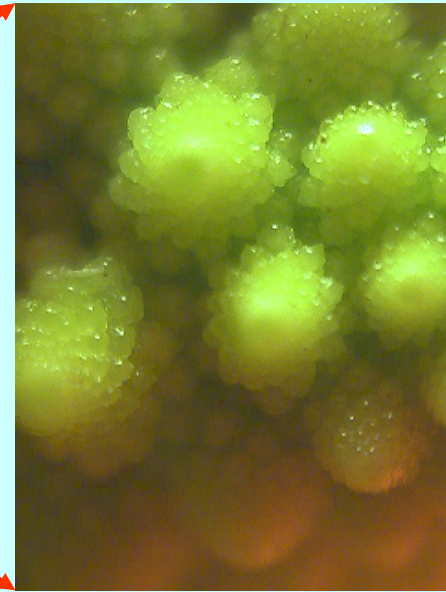
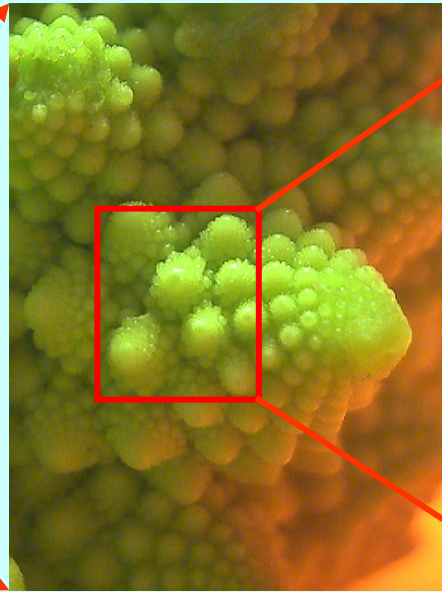
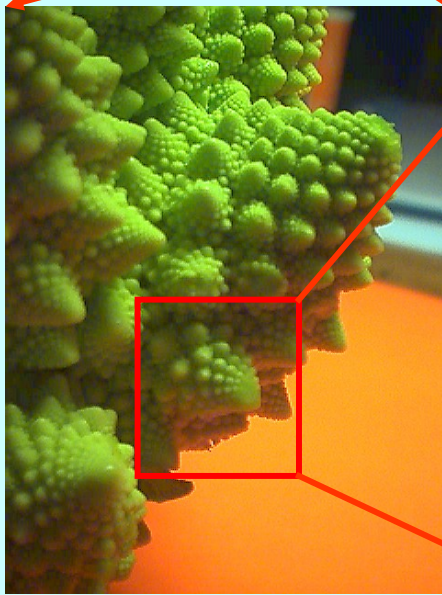
- Fleuve, rivière, ruisseau...



Objets fractals dans la nature - 2



Brocoli Romanesco



Objets fractals - L'ensemble de Mandelbrot

- Itération dans le plan complexe

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

On porte dans le plan les valeurs de C avec une couleur dépendant de la vitesse avec laquelle la suite tend vers l'infini.

- Résultat : **Xaos**

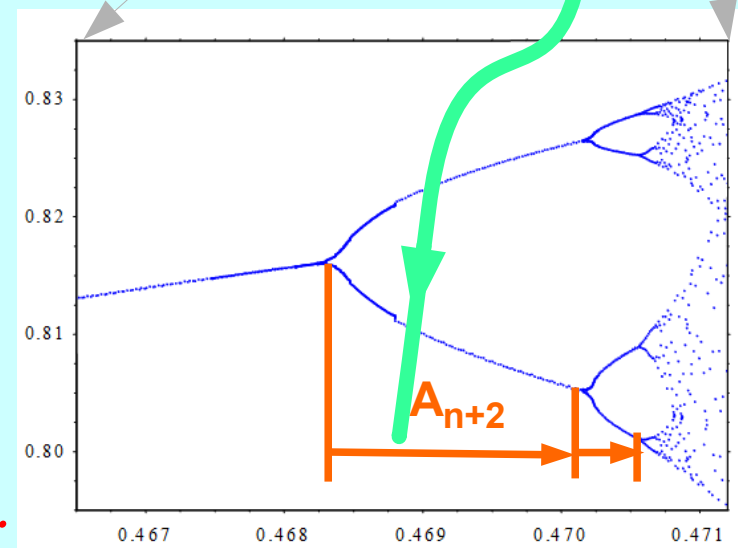
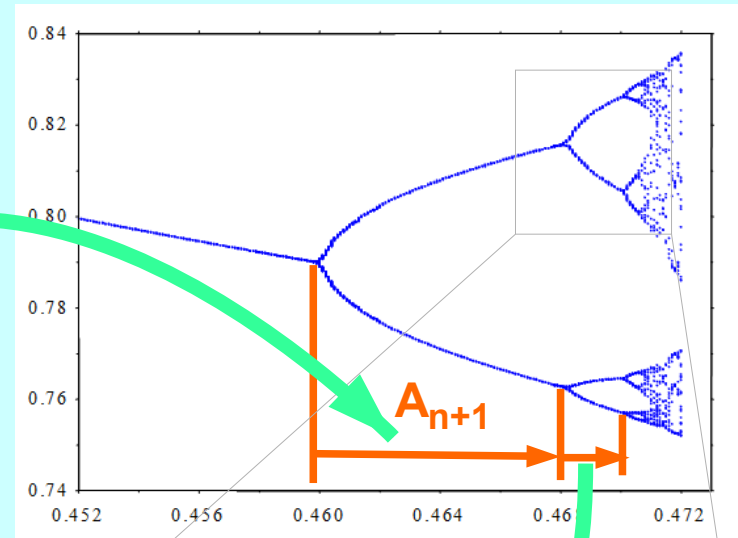
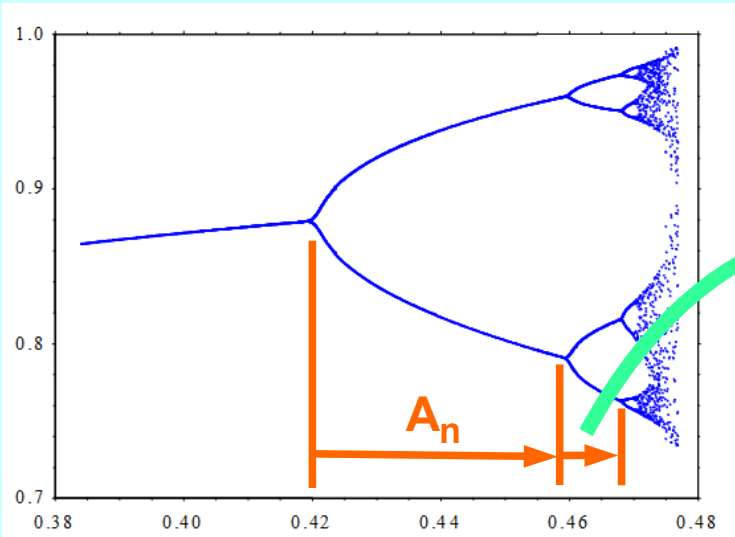
Jan Hubicka, Thomas Marsh

<https://sourceforge.net/projects/xaos/>

Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période
 - ➔ Universalité
 - ➔ Autosimilarité - Fractale
- Plongée dans le chaos

Autosimilarité - Nombre de Feigenbaum



Le rapport de grandissement A_n/A_{n+1} tend vers une limite.

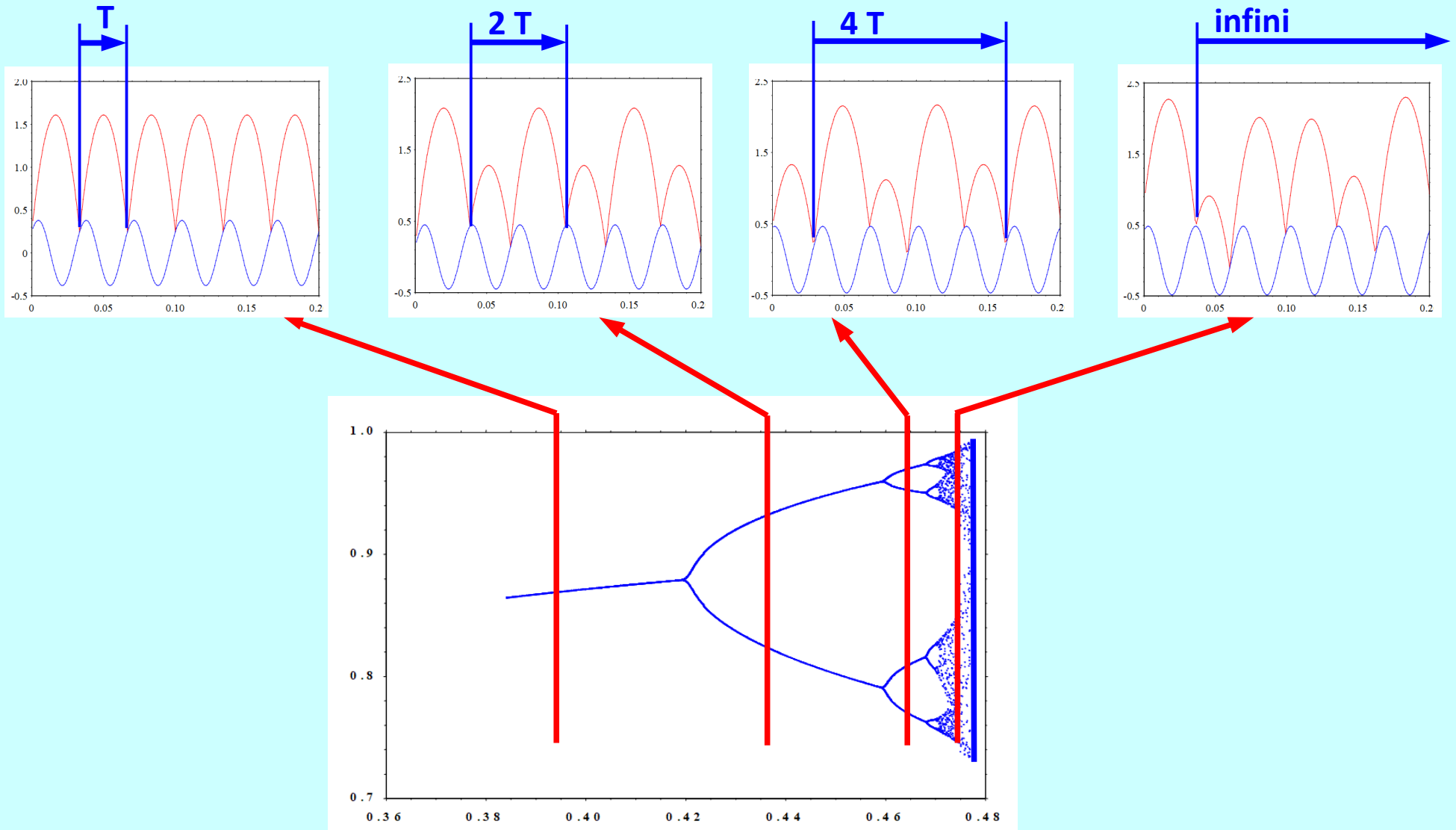
$$d = 4,6692\dots$$

Limite universelle quel que soit le phénomène étudié :

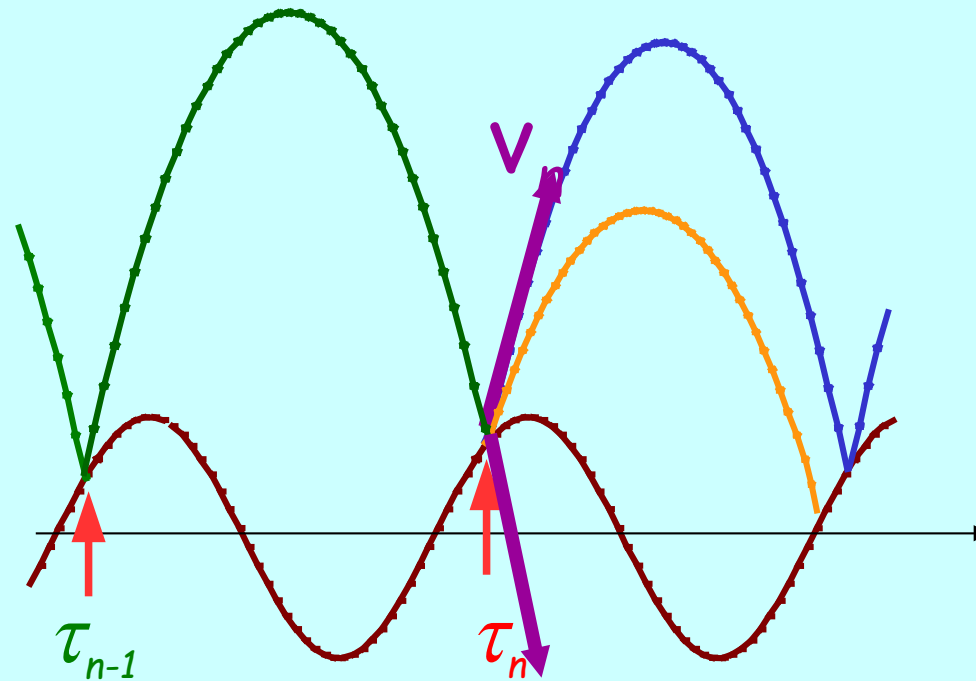
Nombre de Feigenbaum

Aussi universel que $\pi = 3,141592\dots$

Cascade de doublement de période - et après ?



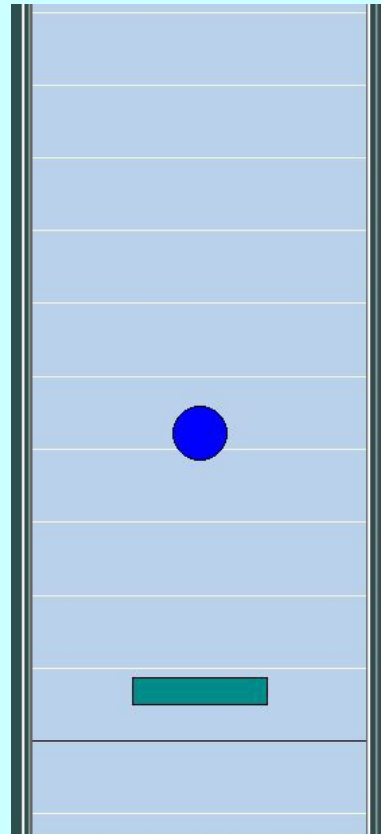
Représentation $\tau_{n-1} \tau_n$



Le couple $\tau_{n-1} \tau_n$ contient toutes les informations nécessaires pour la prévision du choc suivant.

La mesure d'une même variable à un ou plusieurs instants dans le passé est une méthode classique pour l'étude des systèmes chaotiques. En particulier pour les systèmes dont on ne connaît pas grand chose.

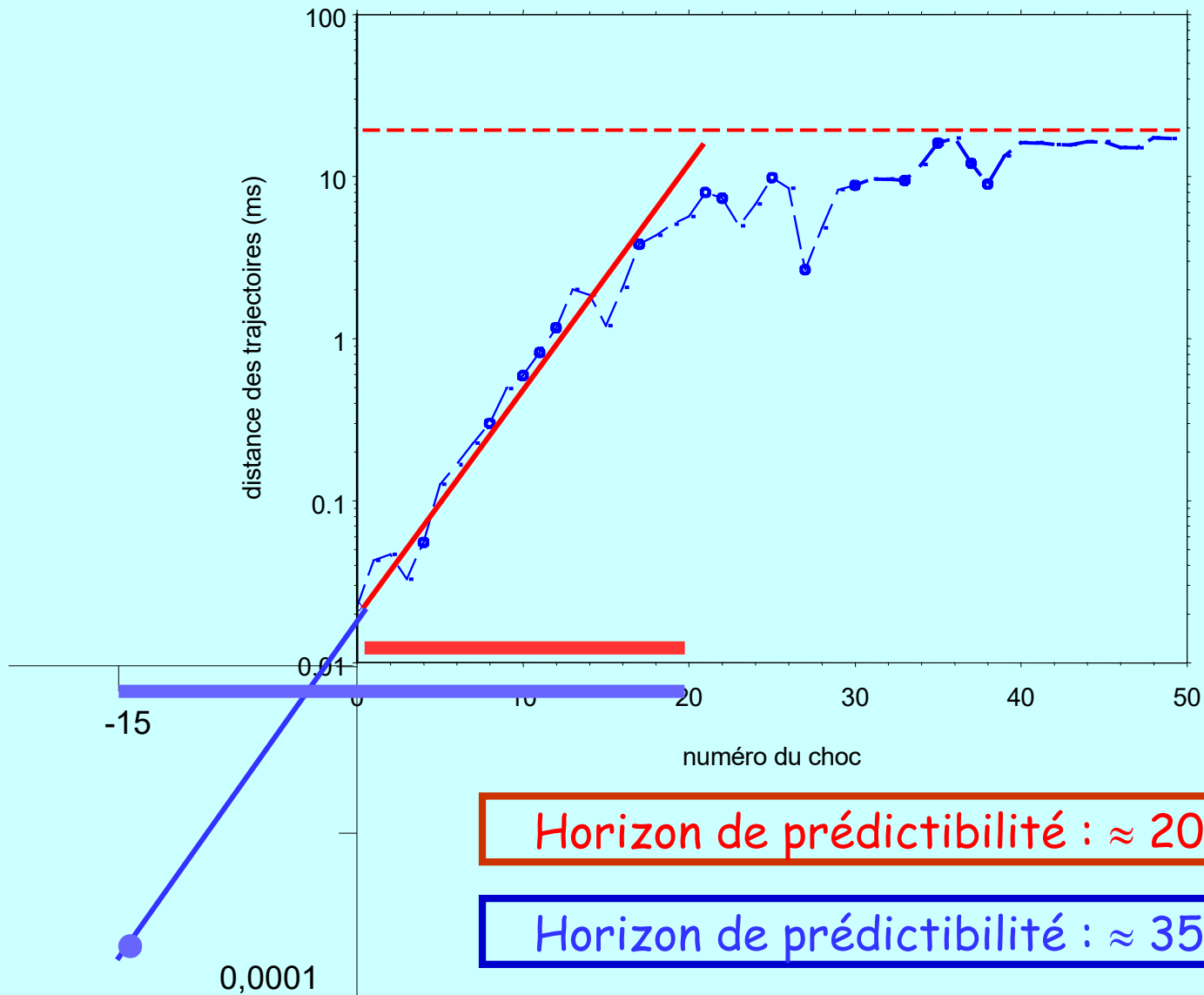
Simulation



Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période
 - Universalité
 - Autosimilarité - Fractale
- Plongée dans le chaos
 - Attracteur étrange
 - Sensibilité aux conditions initiales - divergence exponentielle

Sensibilité aux conditions initiales - expérience



Jeux de hasard

- Roulette



- Loto

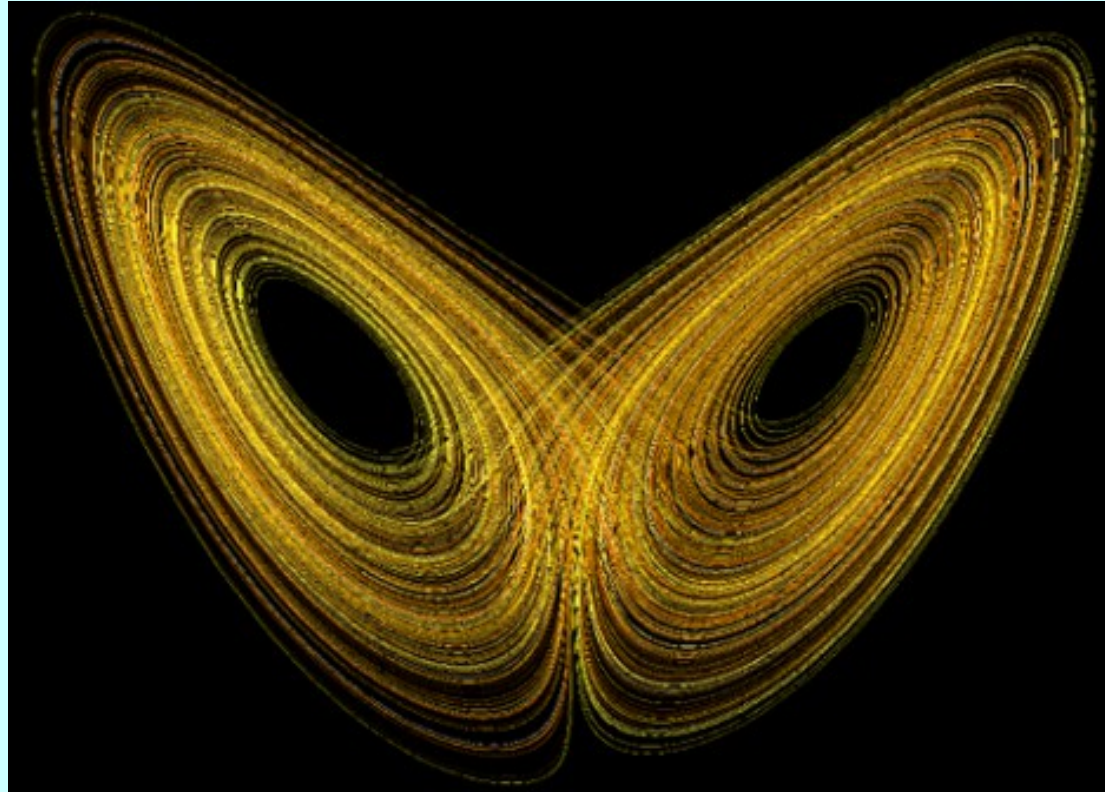


- Pendule double

Météorologie - effet papillon ?

- Edward Lorentz : Modèle ultra simplifié pour comprendre les mouvements de l'atmosphère. Mouvements de convection entre deux plaques.
 - Sensibilité aux conditions initiales → horizon de prédictibilité
 - titre d'une conférence en 1972
 - Le battement d'aile d'un papillon dans le golfe du Mexique peut-il déclencher une tornade au Texas ?*
 - Mais des papillons, il y en a beaucoup...*
- Beaucoup plus de degrés de liberté que dans le modèle simple
→ à grande échelle, les effets se moyennent, la divergence est moins rapide.
- L'effet papillon n'existe pas sous cette forme simpliste en météorologie mais l'image a été reprise partout...

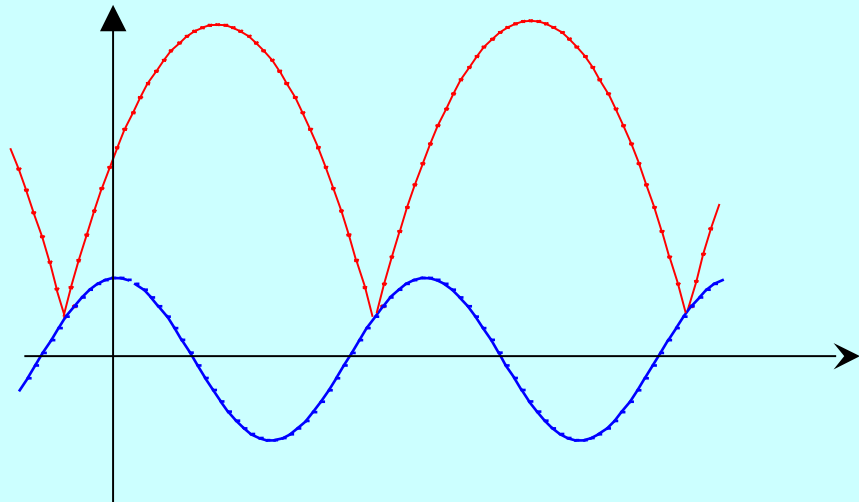
Effet papillon - l'attracteur de Lorentz



Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période
 - Universalité
 - Autosimilarité - Fractale
- Plongée dans le chaos
 - Attracteur étrange
 - Sensibilité aux conditions initiales - divergence exponentielle
 - L'effet papillon
- Déterministe mais imprévisible

Calcul de la trajectoire



Mouvement de la bille :

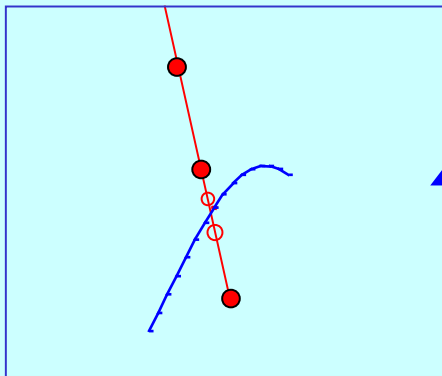
$$z = z_i + v_i t - 1/2 g t^2$$

$$v = v_i - g t$$

Mouvement du plateau :

$$Z = A \cos(\omega t)$$

Choc : intersection des deux
résolu *numériquement*



Vitesse après le choc :

loi de restitution des vitesses
relatives : $V' = -\mu V$

Mathématiquement, la suite des rebonds est parfaitement déterminée

Déterminisme et prédictibilité

- Mathématiquement, le système est entièrement déterministe : si on lance deux fois la simulation avec les mêmes chiffres on aura exactement le même résultat
- A cause de la sensibilité aux conditions initiales, dans le monde réel on ne peut pas prévoir en pratique au delà de l'horizon de prédictibilité.

La science ne peut-elle rien prévoir ?

Déterminisme et prédictibilité

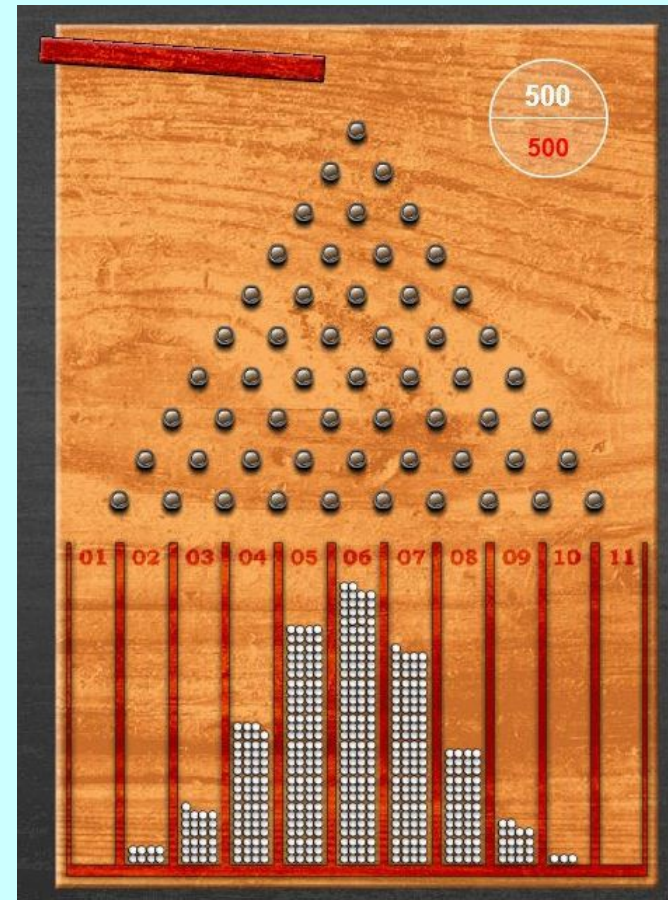
- Il y a aussi des systèmes stables
- Horizon de prédictibilité
 - système solaire

- Retour à la prédiction : la statistique

Retour à la prédiction - la statistique

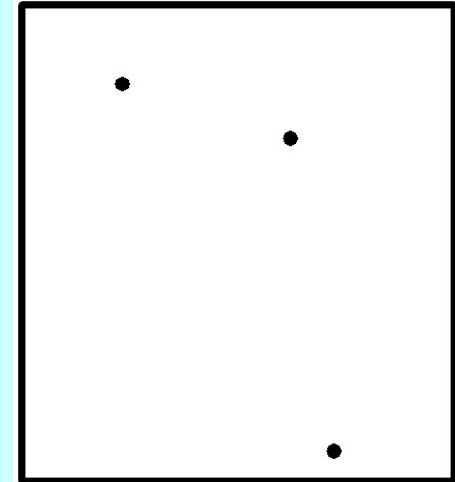
- La planche de Galton
 - On ne peut pas prévoir le trajet d'une bille descendant parmi les plots.
 - Pour 50 billes, une tendance se dessine.
 - Sur un grand nombre de billes, on peut prédire précisément quelle proportion tombera dans une boîte donnée.

https://www.espace-sciences.org/sites/espace-sciences.org/files/documents/animations-en-ligne/autres/galton/galton_www_01.swf



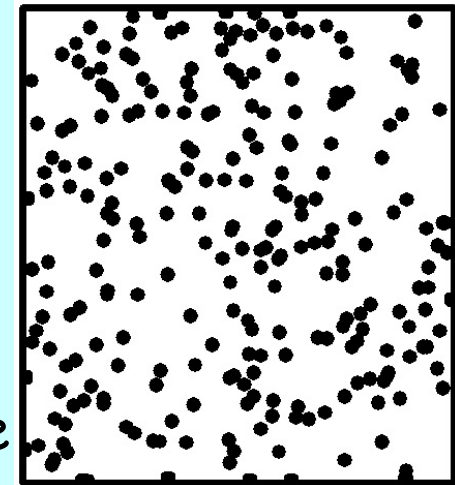
Physique des gaz

- Trois molécules dans une boîte
 - Trajectoires imprévisibles



- 1000000000000000000000000 (10²³) molécules
(~5g d'air)

- Connaissant la température
on peut prévoir précisément la force
exercée sur une paroi et la modification
de cette force lorsqu'on change le volume



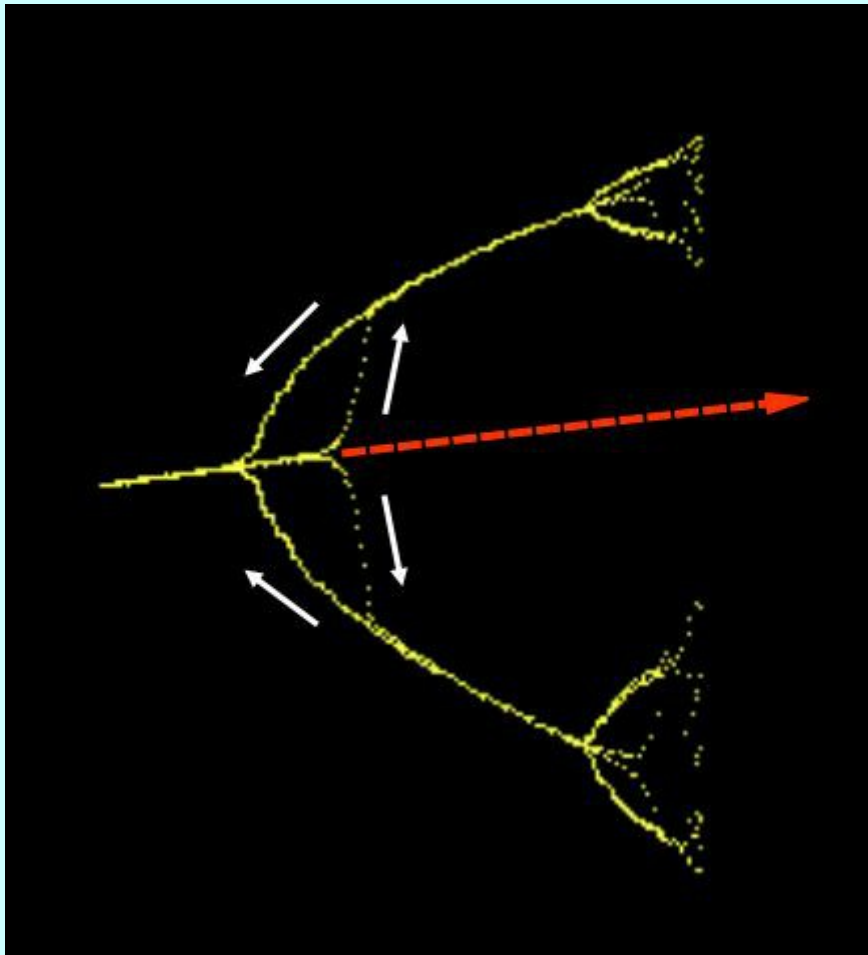
Loi des gaz parfaits

Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période
 - Universalité
 - Autosimilarité - Fractale
- Plongée dans le chaos
 - Attracteur étrange
 - Sensibilité aux conditions initiales - divergence exponentielle
 - L'effet papillon
- Déterministe mais imprévisible
 - Mathématique et monde réel
 - Retour à la prédiction : la statistique
- Contrôle du chaos

Contrôle du chaos

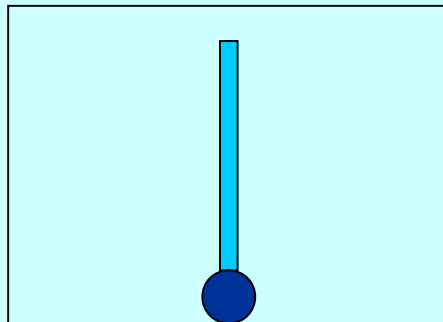
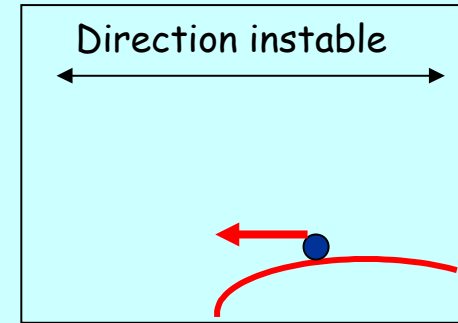
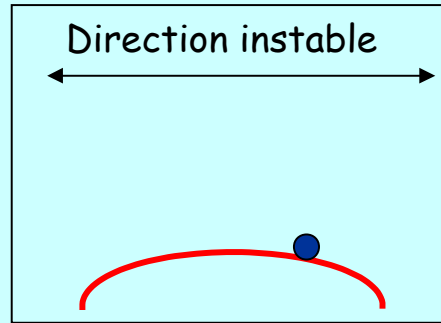
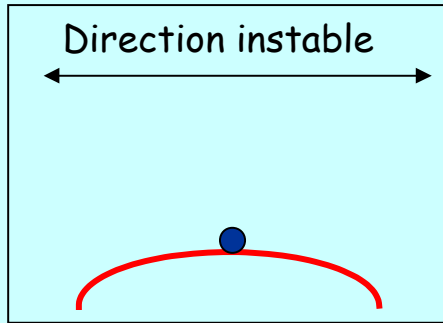
- Trajectoires stables et instables



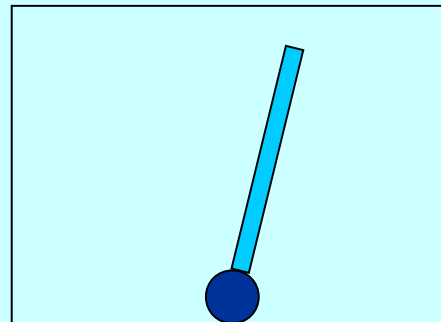
Les trajectoires stables se prolongent en trajectoires instables jusque dans le chaos.

Contrôle du chaos

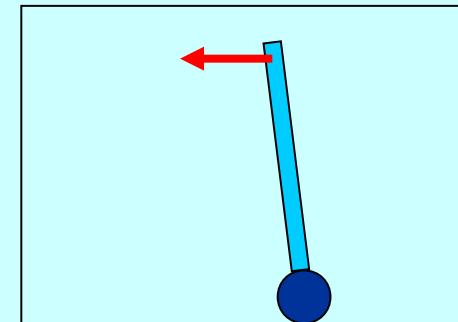
- Contrôle d'une trajectoire instable



Position idéale

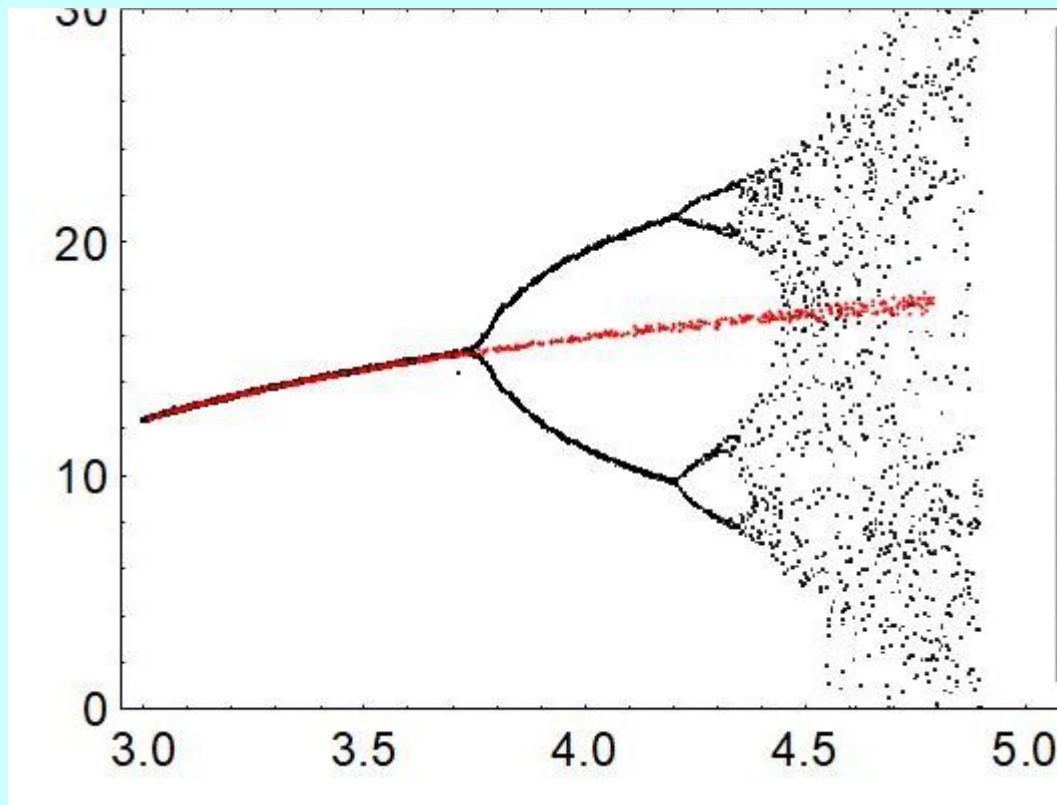


On mesure l'écart



On modifie un paramètre
pour corriger

Contrôle du chaos - Expérience



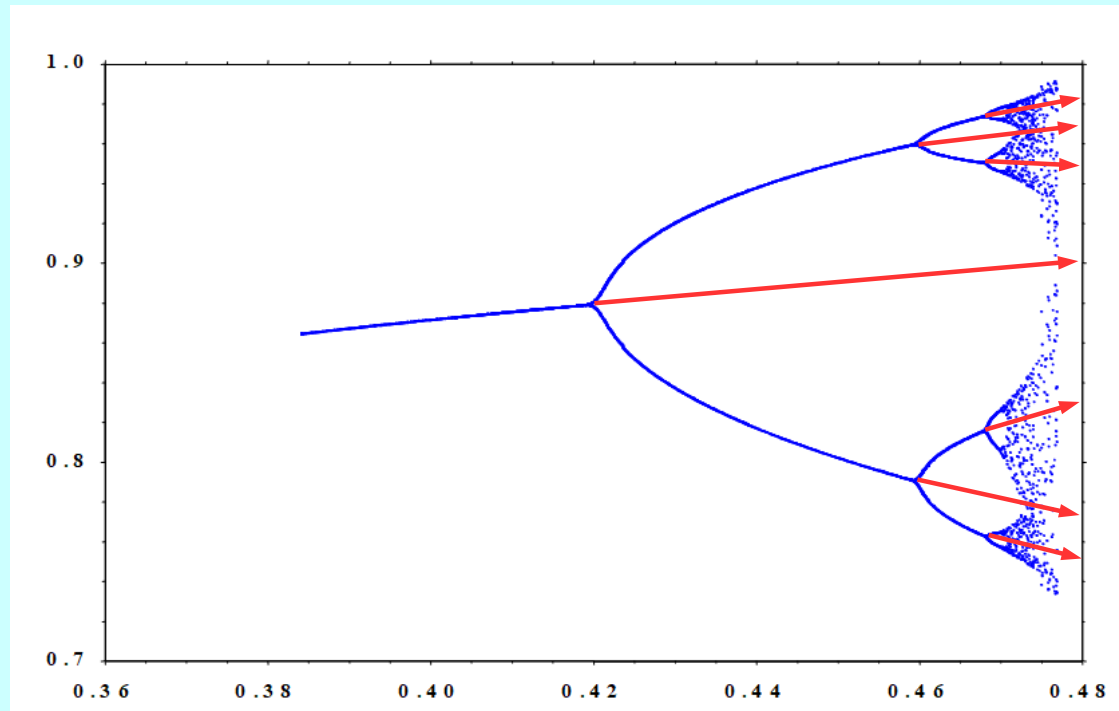
Sans contrôle

⇒ Cascade de doublements

Avec contrôle

⇒ Stabilisation
du régime de période T

Contrôle du chaos - trajectoires instables



- Une infinité de trajectoires instables existent dans le chaos
- Le contrôle peut permettre de passer de l'une à l'autre avec très peu de dépense d'énergie.

Richesse et souplesse du fonctionnement chaotique

Petit voyage dans le chaos

- L'expérience de la bille qui rebondit
- Transition vers le chaos, cascade de doublement de période
 - Universalité
 - Autosimilarité - Fractale
- Plongée dans le chaos
 - Attracteur étrange
 - Sensibilité aux conditions initiales - divergence exponentielle
 - L'effet papillon
- Déterministe mais imprévisible
 - Mathématique et monde réel
 - Retour à la prédiction : la statistique
- Contrôle du chaos
- Un peu d'histoire

Un peu d'histoire

- 1687 - Isaac Newton *Principia Mathematica*
 - ➔ Fondements de la mécanique classique
- 1795 - Pierre-Simon Laplace *Essai philosophique sur les probabilités*
 - ➔ Déterminisme triomphant
- Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent [...] embrasserait [...] les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux

Un peu d'histoire

- 1687 - Isaac Newton *Principia Mathematica*
 - Fondements de la mécanique classique
- 1795 - Pierre-Simon Laplace *Essai philosophique sur les probabilités*
 - Déterminisme triomphant
- 1890 ~ 1910 Poincaré *Science et méthode 1908*
 - Sensibilité aux conditions initiales
- Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard [...] de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux [...] la prédiction devient impossible.

Un peu d'histoire

- 1687 - Isaac Newton *Principia Mathematica*
 - Fondements de la mécanique classique
- 1795 - Pierre-Simon Laplace *Essai philosophique sur les probabilités*
 - Déterminisme triomphant
- 1890 ~ 1910 Poincaré *Science et méthode 1908*
 - Sensibilité aux conditions initiales

Et après ?

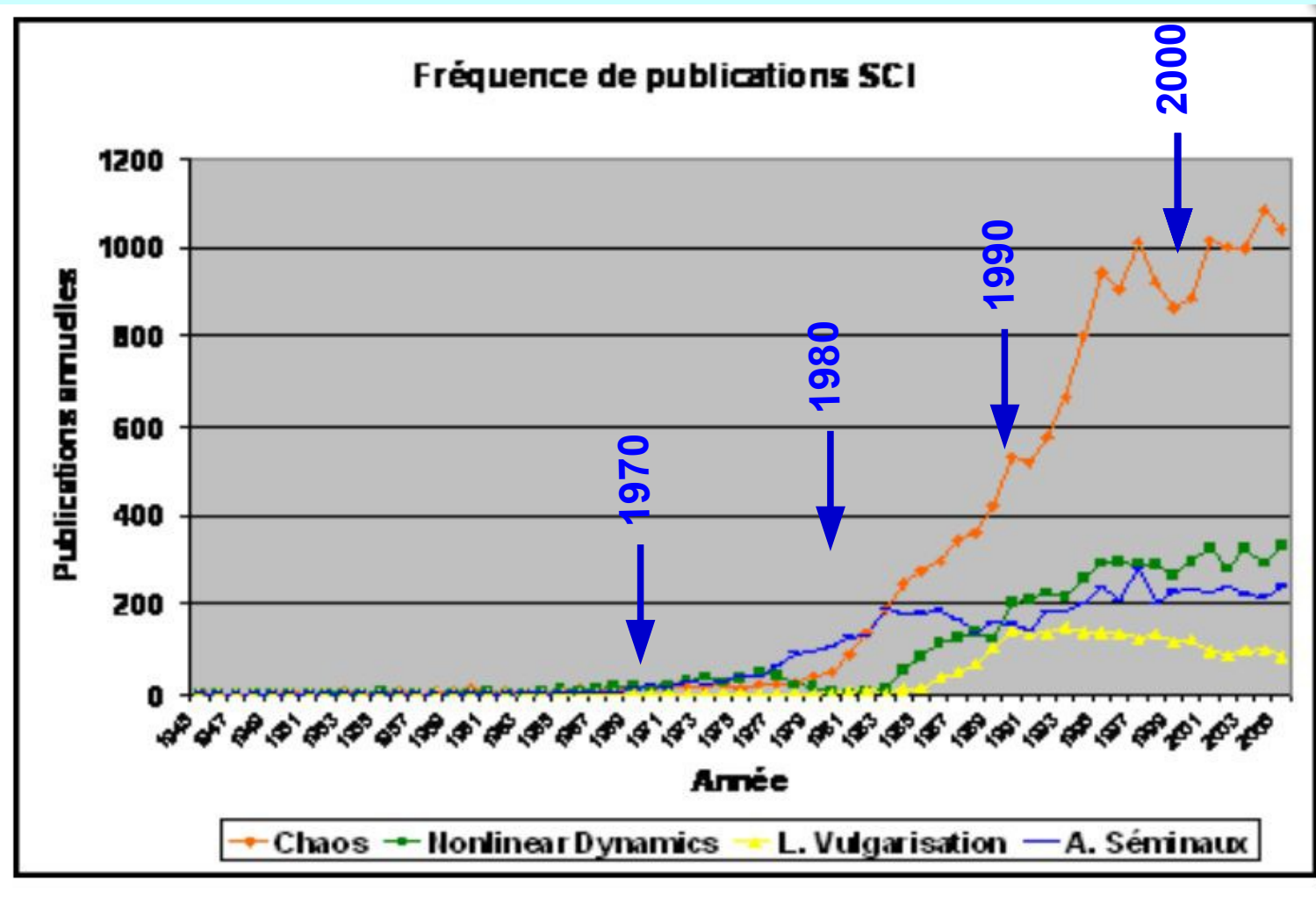
(mécanique quantique)

- 1970 ~ 1980 E. Lorenz et beaucoup d'autres

Et surtout l'ordinateur

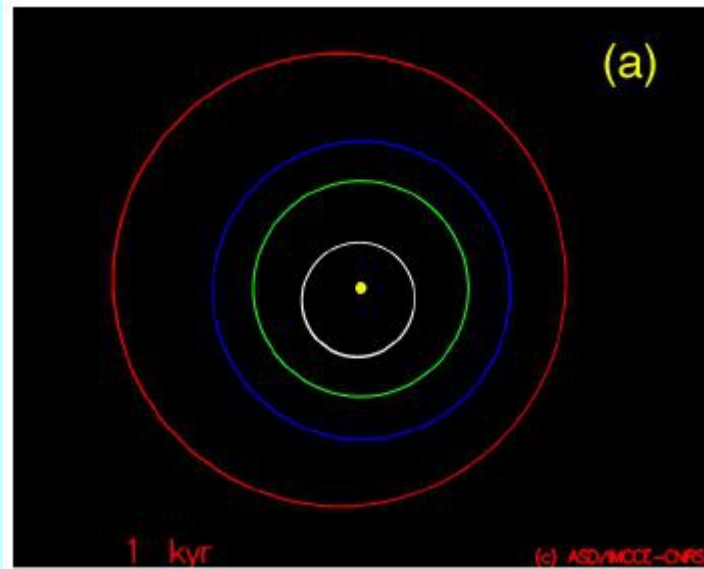
Des phénomènes auxquels personne ne s'intéressait car on ne savait pas les traiter deviennent tout d'un coup accessibles.

Un peu d'histoire

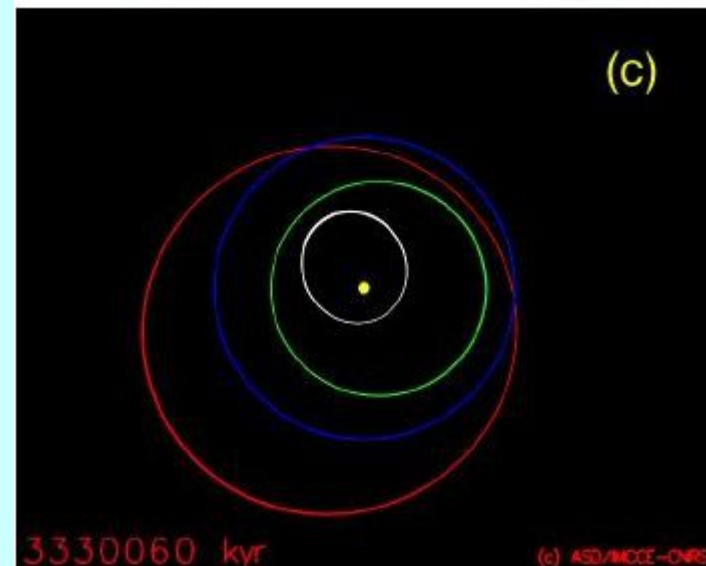


Un peu d'histoire - et maintenant ?

- Le système solaire est-il chaotique ?



- Etat actuel
- Horizon de prédictibilité
~100 million d'années
- J. Laskar
<http://www.bourbaphy.fr/laskar.pdf>



- Un des futurs possibles :
collision Terre - Mars ?
- Probabilité ~1/17000
- Dans 3,3 milliards d'années

Un peu d'histoire - et maintenant ?

- En finance

- + Article de revue

- Does Chaos Matter in Financial Time Series Analysis?*

- <https://ideas.repec.org/a/eco/journ1/2019-04-3.html>

- + *Les évolutions financières peuvent-elles être traitées par ces méthodes ?*

- ~ 40 articles analysés:

- 19 Oui , 14 Non , 6 Peut-être*

Un peu d'histoire - et maintenant ?

- En biologie :

- Fonctionnement du coeur

- Fonctionnement normal chaotique,*

- rythme trop régulier pathologique*

- Défibrillateur par contrôle du chaos*

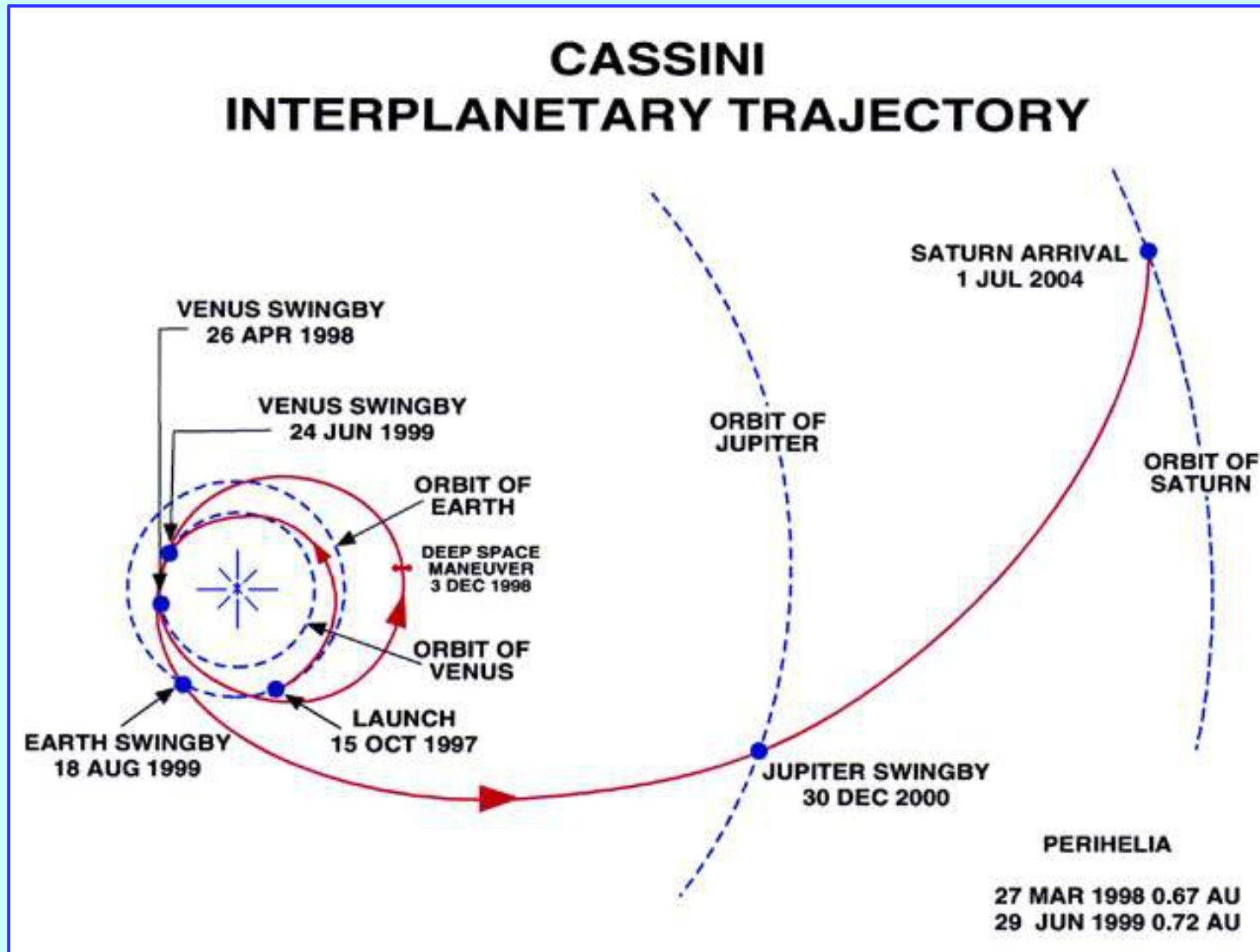
- Cerveau

- Fonctionnement normal chaotique...*

- Traitement de l'épilepsie*

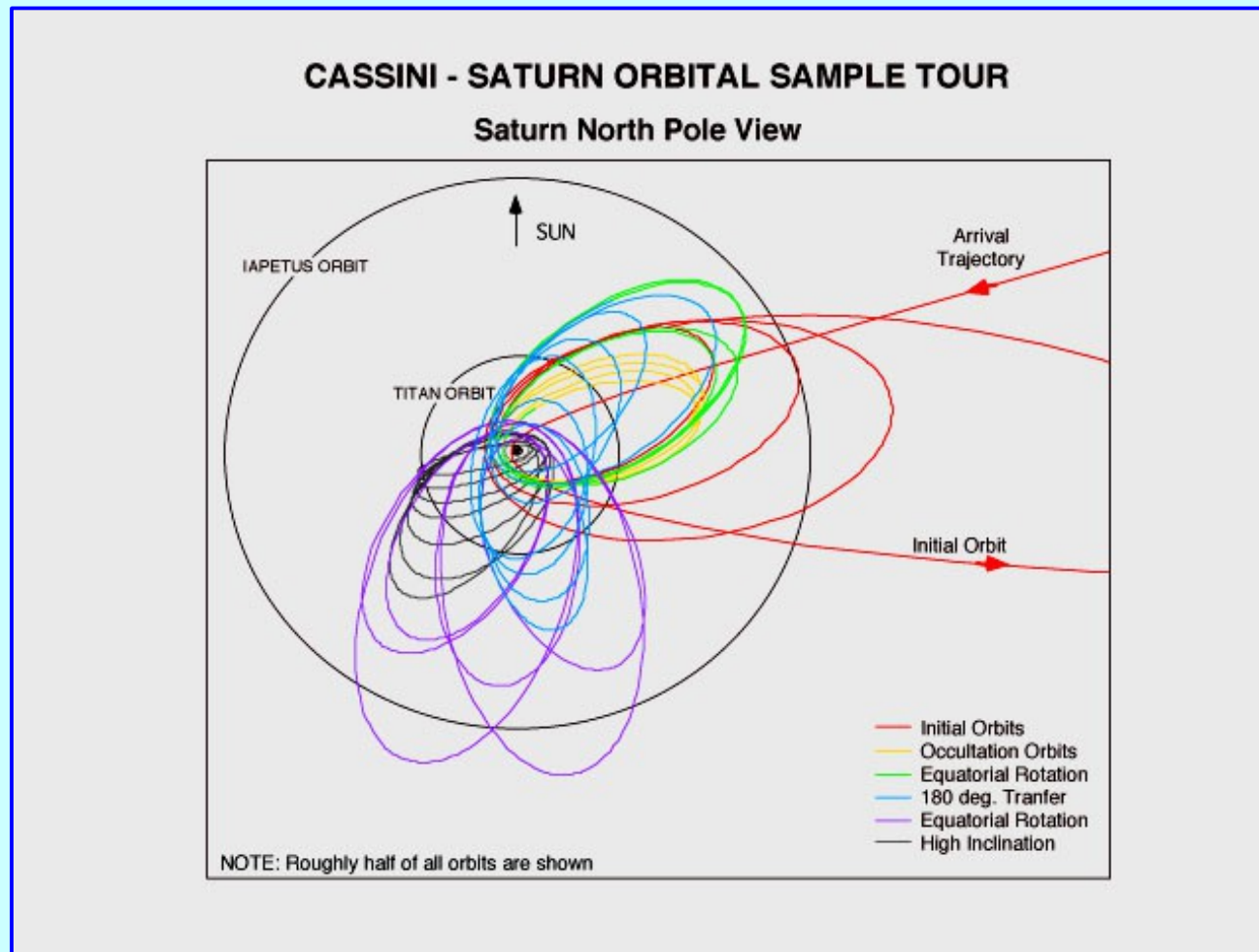
L'enthousiasme du début semble un peu retombé mais d'autres idées aboutissant à des applications émergeront peut-être un jour.

Cassini



- La mécanique newtonienne est encore utile
- Sensibilité aux conditions initiales
- Contrôle du chaos

Cassini



- A ~1,5 milliard de km de la terre
il faut ~1h30 pour transmettre ou recevoir un signal



• *Fin*